

Chapitre I : Interpolation polynomiale : Interpolation au sens des moindres carrés

I) Introduction

L'ingénieur, l'organisateur, le sociologue ont souvent à prendre des décisions au sujet de phénomènes dont ils ne connaissent le comportement qu'à partir de données ou de mesures expérimentales

Dans certains cas, comme en physique, la connaissance fondamentale des phénomènes permet de proposer un modèle mathématique précis

Mais bien souvent, on ignore les mécanismes précis de phénomène ou alors les mesures sont bruitées

On peut alors proposer un modèle statistique

L'approximation peut se concevoir comme une application de $\mathbb{R}^n$ (espace à n dimension des variables mesurées) dans $\mathbb{R}^m$ (espace à m dimensions des paramètres d'un modèle)

Cette application dépend d'un modèle choisi

II) Modèle linéaire

Le but est de trouver une fonction

$Y^* = g^*(x)$ qui approchera au mieux le jeu de n données

$\{x_i, y_i \mid i=1, n\}$ représenté par $y = g(x)$

Le modèle le plus commun donne de la classe des fonctions de la forme

$$Y^*(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_m f_m(x)$$

Où

Les $f_j(x)$ constituent un s.e.v. de dimension m

Les paramètres $[C_1, C_2, \dots, C_m]$ apparaissent sous forme linéaires (indépendant de x)

Remarque

Cette forme linéaire inclut

a) Les polynômes simples

$$Y^* = C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{(n-1)}$$

b) Les polynômes de Legendre

$$Y^* = C_1 P_0(x) + C_2 P_1(x) + \dots + C_m P_m(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$
$$P_0(x) = 1$$

c) Polynôme de Chebyshev

$$Y^* = C_1 T_0(x) + C_2 T_1(x) + \dots + C_m T_{m-1}(x)$$

$$T_0(x) = 1 \quad \Rightarrow (T_{k+1})(x) = 2x(T_k)(x) - (T_{k-1})(x) \\ T_1(x) = x$$

d) Besell , fournier, formes exceptionnelles

III) Mesure de la qualité d'une approximation

Une solution approximation nécessite que $(y - y^*)$ soit mesuré et minimisée

La distance entre la fonction réelle y et mon modèle y^* peut être mesuré par la norme

L1 norme de Laplace

$$\|y - y^*\|^{(1)} = \sum_{i=1}^n |y_i - y_i^*|$$

L2 Norme Euclidienne

$$\|y - y^*\|^{(2)} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2$$

L^∞ Norme mini maxi de Laplace Chebychev

$$\|y - y^*\|^{(\infty)} = \max_{i=1,n} |y_i - y_i^*|$$

On utilise en général la norme L1 ou mieux, la norme des carrés pondérés de Legendre

$$\|y - y^*\|_{(2, \omega)} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2 \omega_i$$

$\omega_i > 0$

Qui permet de privilégier certains points de mesure (par exemple plus précis) par l'intermédiaire d'une fonction poids ω_i

IV) approximation et interpolation

Soit un ensemble de n valeurs x_i d'une grandeur x , auxquelles correspond un ensemble de valeurs y_i d'une grandeur y

$y_i^* = f(x_i, C_1, C_2, \dots, C_m)$ représente la liaison entre X et Y , est connue
 $C_1, C_2, \dots, C_m$ inconnues à définir

Si le modèle est parfait, alors, $y_i - y_i^* = 0$

$Y_i - f(x_i, C_1, C_2, \dots, C_m) = 0 \quad i=1, n$

C'est un système linéaire (hypothèse sur les C_i) de N équations à n inconnues

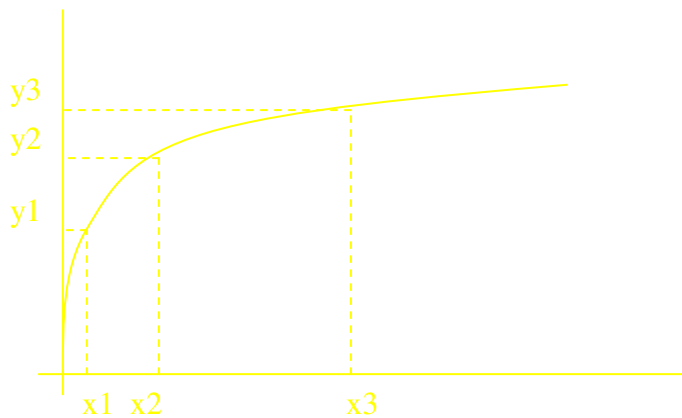
3 cas :

a) $n < m$ soit plus d'inconnues que d'équations

il y a une infinité de solutions

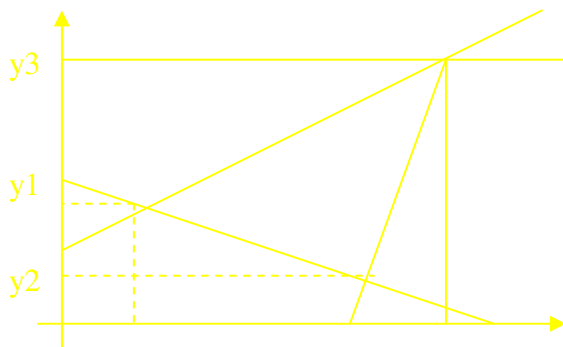
il y a une indétermination d'ordre $(m-n)$

b) $n = m$ Solution unique des $(C_1, C_2, \dots, C_m)$ y_i^* passe par chacun des n points donnés



c) $n > m$ Système surdéterminé de n équations à m inconnues

Aucune fonction ne peut passer par tous les points



Dans le 3^{ième} cas, les y_i^* diffèrent des y_i d'où l'erreur commise $e_i = y_i - y_i^*$,
 $i=1, n$

Systèmes de n équations linéaires à $(m+n)$ inconnues : $(m \ C_j + h \ e_i)$

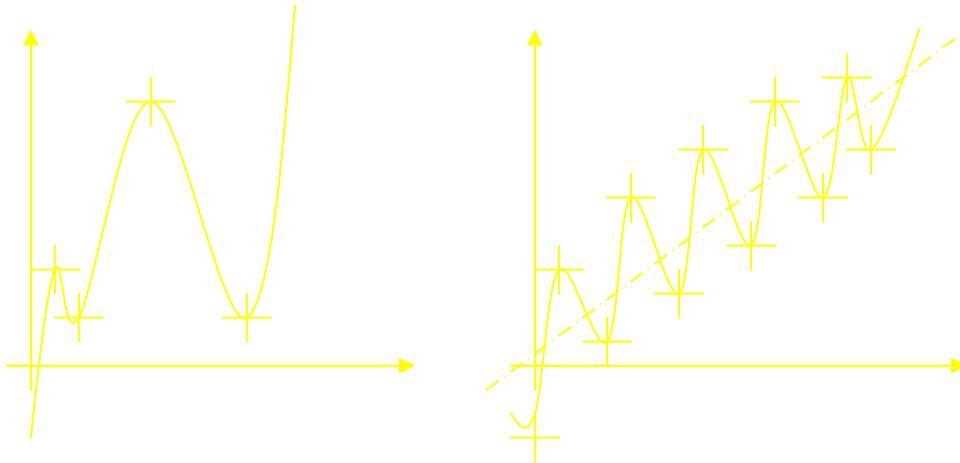
On cherchera à minimiser le e_i par la norme L_2 ou L_2 , ω

Conclusion

Mathématiquement on a 2 types de problèmes

$n=m$ Problème d'interpolation

$n>m$ Problème d'approximation



V) Interpolation polynomiale

1) Généralités

Soit $(n+1)$ couples $(x_0, y_0); (x_1, y_1); \dots$

$(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que les x_i soient tous différents

On cherche un polynôme P tel que $p(x_i) = y_i = y^{(xi)}$

Théorème d'unicité

$\exists$ un polynôme et un seul de degrés au plus n tel que $P(x_i) = y^{(xi)}$; $i = 0, n$

La recherche d'un polynôme est équivalente à la résolution d'un système linéaire à $(n+1)$ dimension

$$\begin{array}{ccc}
 |1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n| & |C_0| & |y_0| \\
 |1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n| & |C_1| & |y_1| \\
 | & : & & & | & | & | \\
 | & : & & & | & | & | \\
 | & : & & & | & | & | \\
 |1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n| & |C_m| & |y_m|
 \end{array}
 \quad * \quad
 \begin{array}{ccc}
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & |
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & | \\
 | & | & |
 \end{array}$$

Donc le déterminant, appelé déterminant de Van der Made

$\prod (x_i - x_j)$ ne s'annule pas car $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ condition nécessaire aux mesures
 $n > i > j > 0$

pour $i \neq$ condition nécessaire aux mesures

D'où une solution unique pour le $C_0, C_1, \dots, C_n$

On montre que l'erreur s'écrit

$$Y^*(x) - y(x) = P(x) - y(x) \\ = (y^{(n+1)} \varepsilon / (n+1)!) \Pi(x)$$

Où

$$\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{et} \quad \varepsilon \in [x_0, x_n]$$

2) Polynôme de Lagrange

Existence :

La construction d'un polynôme de degrés au plus n / $p(x_i) = y(x_i) = y_i$ pour $i=0, n$ prouvera son existence.

a) Cas particuliers

Trouver le polynôme l_k de degrés au plus n /

$$l_k(x_i) = 0 \quad \text{pour } i \neq k \\ l_k(x_k) = 1$$

Ce polynôme s'annule n fois pour $x_0, x_1, \dots, x_n$

Il s'écrit donc

$$l_k(x) = \lambda (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$

d'autre part

$$l_k(x_k) = \lambda (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

d'où

$$\lambda = 1 / (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

d'où,

$$l_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n) / (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)$$

b) Cas général

Les $(n+1)$ polynômes l_k ($k=0, 1, \dots, n$) sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des polynômes de degrés au plus n

Demo :

$$\lambda_0 l_0 + \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n = 0$$

$\Rightarrow x = x_n$ et $k=0, n$

$$\begin{aligned} \lambda_0 l_0(x_n) + \lambda_1 l_1(x_n) + \dots + \lambda_k l_k(x_k) + \dots + \lambda_n l_n(x_n) &= 0 \\ \lambda_k &= 0 \text{ vrai ppour } k = 0 \text{ à } n \text{ donc} \\ \lambda_0 &= \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

ainsi les $n+1$ polynômes l_k sont linéairement indépendants.

Les $(n+1)$ polynômes l_k forment une base de cet espace vectoriel de dimension $(n+1)$

Le polynôme recherché s'obtient comme combinaison linéaire des polynômes :

$$P = \sum_{k=0}^n g_k l_k$$

Formule de Lagrange $L_k = l_k$: multiplicateur de Lagrange

$$P(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x_i) = y_i \quad \text{pour } i=0, \dots, n$$

Polynôme osculateur

Ce sont des polynômes qui assurent l'égalité de la fonction et des k premières dérivées

Donc pour un jeu de données $(x_i, y(x_i))$

Tel que

$$p(x_i) = y(x_i)$$

$$P'(x_i) = y'(x_i)$$

Les 2 courbes sont tangentes en x_i

c) Formule d'hermite

Soit un jeu de $n+1$ données, $\exists$ un polynôme unique de degrés $(2n+1)$ tel que

$$P(x_i) = y(x_i)$$

$$P'(x_i) = y'(x_i)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^n U_i(x) y(x_i) + \sum_{i=0}^n V_i(x) y'(x_i)$$

On montre que

$$U_i(x) = \{1 - 2(x - x_i) l_i(x_i)\} l_i^2(x)$$

$$V_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x)$$

d) Polynôme de Taylor

Pour une seule valeur de x_0 du jeu de données, les valeurs du polynôme et ses n premiers dérivées doivent coïncider avec celle d'une fonction définie par $y(x)$

Soit $P_i(x_0) = y_i(x_0)$ pour $i = 0, 1, \dots, N$

$$\text{Où } P(x) = \sum_{i=0}^n (y_i(x_0)/i! (x - x_i)^i)$$

VI) Méthode des moindres carrés

1) Modèle linéaire quelconque

On propose le modèle linéaire (les C_j sont inconnues $j=1, \dots, m$)

$$Y_i^* = C_1 f_1(x_i) + C_2 f_2(x_i) + \dots + C_m f_m(x_i)$$

L'erreur commise en tout point $i \leq n$, donc aucune courbe ne peut passer par tous les points d'appuis

En approximant les valeurs mesurées Y_i par y_i^* et $e_i = y_i - y_i^*$

Soit

$$y_i - \sum_{j=1}^m C_j f_j(x_i) = e_i$$

Le système de n équations à $n+m$ inconnues (C_j pour $j=1$ à m et e_i pour $i = 1, \dots, n$) admet une infinité de solutions

La meilleure solution sera obtenue en minimisant le scalaire

$$Z = \sum_{i=1}^n e_i^2$$

une C.N. pour que Z soit minimal dans l'espace des paramètres (C1,CM) afin que $\partial Z / \partial C_k = 0$, $k=1,n$

$$\frac{\partial}{\partial C_k} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i (e_i)^2 \right) = 0 \quad k=1,m$$

$$2 \sum_{i=1}^n \omega_i e_i \partial e_i / \partial C_k = 0 \quad k=1,m$$

mais

$$\partial e_i / \partial C_k = \partial / \partial C_k \left(y_i - \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_i e_i \partial e_i / \partial C_k = 0 \quad k=1,m$$

mais

$$\partial x_i / \partial C_k = \partial / \partial C_k \left(y_i - \sum_{j=1}^m C_j f_j(x_i) \right)$$

$$= \partial y_i / \partial C_k - \sum_{j=1}^m \partial / \partial C_k (C_j f_j(x_i))$$

$$= - \sum_{j=1}^m \{ f_j(x_i) \partial C_j / \partial C_k + C_j f_j'(x_i) / \partial C_k \}$$

$$= - \sum_{j=1}^m f_j'(x_i) \partial C_j / \partial C_k$$

$$= -f_k(x_i)$$

Soit

$$\sum_{j=1}^n \omega_i \left[y_i - \sum_{j=1}^n C_j f_j(x_i) \right] f_k'(x_i) = 0 \quad k = 1,m$$

en définissant

$$b_k = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i f_k(x_i) \quad k=1,m$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^n \omega_i f_i(x_i) f_k(x_i) \quad k=1,m \quad j=1,m$$

Le système s'écrit

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} C_j = b_k \quad k=1,m$$

Remarque

$a_{kj} = a_{jk}$ par construction

A est symétrique

Les quantités a_{kj} et b_k sont entièrement déterminées car on connaît les (x_i, y_i) et le modèle que l'on propose.

Soit $f_j(x)$ et les poids ω_i

Il ne reste donc que m inconnues ($C_1, \dots, C_m$)

Remarque :

Les systèmes étant à matrice symétrique (définie positives) par construction, l'emploi de la méthode de CHOLESKI est fortement indiquée

2) Modèle polynomiale Simple

$$y_i^* = C_1 x_i^0 + C_2 x_i^1 + \dots + C_m x_i^{n-1}$$

donc les $f_j(x_i) = x_i^{j-1}$

donner le système $Ax=b$

$$\sum_{j=1}^m a_{kj} C_j = b_k \quad k=1,n$$

$$\begin{aligned} a_{11}C_1 &= a_{12}C_2 = a_{13}C_3 = \dots = b_1 \\ a_{21}C_1 &= a_{22}C_2 = a_{23}C_3 = \dots = b_2 \end{aligned}$$

Or on sait que pour $k=1,m$ et $j=1,m$

$$b_k = \sum_{i=1}^n \omega_i y_i f_k(x_i)$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^n \omega_i f_j(x_i) f_k(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^{(j-1)} x_i^{(k-1)}$$

$$= \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^{(k+j-2)}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^n \omega_i j_i x_i^{(k+1)}$$

Si $\omega_i=1$

$\sum_{i=1}^n 1 \dots$	$\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 \dots$	$\sum_{i=1}^n x_i^{(n-1)}$	$*$	C_1	$=$	$\sum_{i=1}^n y_i f_1^{(x_i)}$
$\sum_{i=1}^n x_i \dots$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n$	$\sum_{i=1}^n$		C_2		$\sum_{i=1}^n y_i f_2^{(x_i)}$
$\sum_{i=1}^n x_i^{*(n-1)}$	$\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n$	$\sum_{i=1}^n x_i^{2(n-1)}$		C_m		$\sum_{i=1}^n y_i f_m^{(x_i)}$